ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU GABRIEL MÎRŞANU MARCEL TELEUCĂ

OLIMPIADELE NAŢIONALE

ALE ROMÂNIEI ŞI REPUBLICII MOLDOVA
OLIMPIADELE BALCANICE PENTRU JUNIORI
(OBMJ)
2014 - 2020

CLASELE V – VIII

Partea I + Partea a II-a = 1368 de probleme

PARTEA A II-A

– etapa judeţeană 2014-2019 (subiect unic), clasele V-VIII
– Olimpiada Naţională a României (2014-2019), clasele V-VIII
– Olimpiada Naţională a Republicii Moldova (2014-2018), clasele VII-VIII
– barajele pentru alcătuirea lotului olimpic de juniori (OBMJ) al României (2014-2020), clasele V-VIII
– barajele pentru alcătuirea lotului olimpic de juniori (OBMJ) al Republicii Moldova (2014-2017), clasele VII-VIII
– Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori (OBMJ) 2014-2020

Editura Taida
IAŞI, 2021

Cuprins

ETAPA JUDEȚEANĂ – SUBIECT UNIC

Clasa a V-a

2014

9. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relația: $b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$.

10. Fie M mulțimea numerelor *palindrom* de forma $5n + 4$, unde $n \in \mathbb{N}$. (Un număr natural se numește *palindrom* dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu: numerele 7, 191, 23532, 3770773 sunt numere *palindrom*.)
a) Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulțimii M, stabiliți care este al 50-lea număr scris.
b) Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre elementele mulțimii M care se scriu cu cifre nenule și au suma cifrelor 2014.

11. Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{2014}\}$. Spunem că se realizează o *partiție* a lui A dacă mulțimea A este scrisă ca o reuniune de submulțimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.
a) Demonstrați că nu există o partiție a lui A astfel încât produsul elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.
b) Arătați că există o partiție a lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.

12. Un număr natural de 10 cifre se numește *dichisit* dacă cifrele sale aparțin mulțimii $\{1, 2, 3\}$ și oricare două cifre consecutive diferă prin 1.
a) Arătați că un număr dichisit conține în scrierea sa exact cinci cifre de 2.
b) Stabiliți câte numere dichisite există.
c) Demonstrați că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.

2015

13. Determinați toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor cel puțin egale cu a și cel mult egale cu b. **(Mihai Dicu)**

14. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Știind că fiecare elev a rezolvat cel puțin o problemă și că numărul de soluții corecte ale tuturor concurenților este 100, arătați că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25. **(Radu Gologan)**

15. Mulțimea numerelor naturale nenule se împarte în submulțimi astfel: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 8, 9\}$, … .
a) Aflați cel mai mic element din cea de-a 100-a submulțime.
b) Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulțimi?
(Relu Ciupea, Gazeta Matematică nr. 10/2014)

OLIMPIADA NAȚIONALĂ A ROMÂNIEI
ETAPA NAȚIONALĂ

Clasa a V-a
2014

29. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale impare consecutive se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive. **(Marian Ciuperceanu)**

30. Spunem că unui număr n i se aplică o transformare *interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare *deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o transformare *minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16. **(Lucian Dragomir)**

a) Arătați că există un singur număr care, prin trei transformări succesive, una *interesantă*, una *deosebită* și una *minunată*, aplicate în această ordine, devine 2020.

b) Determinați numerele care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

31. Arătați că există un multiplu al numărului 2013 care se termină în 2014. **(Mihaela Berindeanu)**

32. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conține cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, 10, ..., 100 conțin, în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii? **(Gabriel Popa)**

2015

33. Patru familii prietene au fiecare câte doi copii și toți copiii s-au născut după anul 1989. Anul nașterii mezinilor este același, având suma cifrelor egală cu produsul cifrelor nenule. Diferența de vârstă dintre frații aceleiași familii este un număr natural de ani exprimat printr-un pătrat perfect nenul. Aflați anul nașterii fraților cei mari din fiecare familie, știind că aceștia nu pot avea vârste egale. **(Victor Nicolae și Simion Petre)**

34. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 2015 divizori. **(Mihai Bunget)**

35. Se spune că numărul natural $n \geq 2$ este *norocos* dacă numărul n^2 se poate scrie ca suma a n numere naturale nenule consecutive. Să se arate că:

a) numărul 7 este *norocos*;

b) numărul 10 nu este *norocos*;

c) produsul oricăror două numere *norocoase* este un număr norocos. **(Lucian Dragomir)**

36. Pe tablă sunt scrise, unul după altul, opt numere egale cu 0. Numim *operație* modificarea a patru dintre cele opt numere, astfel: două numere se măresc cu 3, un număr se mărește cu 2, iar cel de al patrulea număr se mărește cu 1.

a) Care este numărul minim de operații pe care trebuie să le efectuăm pentru a obține pe tablă opt numere naturale consecutive.

b) Este posibil ca, după un număr de operații, toate numerele scrise pe tablă să fie egale cu 2015?

c) Este posibil ca, în urma unei succesiuni de operații, produsul numerelor de pe tablă să fie 2145? **(Gheorghe Rotariu)**

2018

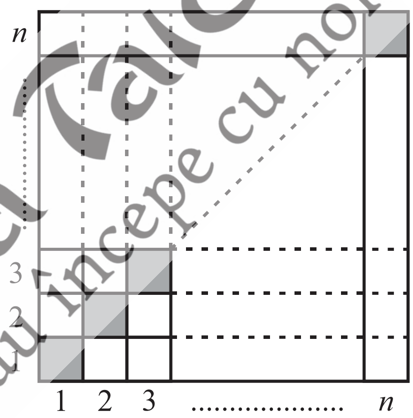
45. Determinați numerele prime $a > b > c$ pentru care $a - b$, $b - c$ și $a - c$ sunt numere prime diferite. **(Ion Cicu)**

46. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}$.

(Mihaela Berindeanu)

47. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1, 2, 3, ... , 27. Un *pas* înseamnă ștergerea a trei numere a, b, c de pe tablă și scrierea în locul lor a numărului $a + b + c + n$, unde n este număr natural nenul fixat. Determinați numărul natural n știind că, după 13 pași, pe tablă este scris numărul n^2. **(Lucian Dragomir)**

48. Se consideră un număr natural $n \geq 2$ și un pătrat $n \times n$ (**vezi figura alăturată**). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile hașurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele hașurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie și pe fiecare coloană, obținând astfel $2n$ sume. Pătratul se numește *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele 1, 2, ... , $2n$.



a) Arătați că, pentru $n = 5$, nu există pătrat norocos.
b) Dacă $n = 4$, determinați cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos. **(***)**

2019 (23 aprilie, 2019, Deva)

49. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, al căror pătrat are cifra sutelor a, cifra zecilor b și cifra unităților c. **(Gabriel Popa, Iași și Petre Rău, Galați)**

50. Fie $n \geq 2$, un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre 1, 2, …, n cu proprietatea că, pentru oricare două dintre acestea, a, b, cu $a \neq b$, numărul $a - b$ nu divide numărul $a + b$?

(Vasile Pop, Cluj-Napoca)

51. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y), de numere naturale, alese dintre 1, 2, ..., n, cu $x \neq y$, astfel încât x și y să aibă exact $x - y$ divizori comuni.
a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?
b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?
Justificați răspunsurile. **(Vlad Robu, elev, Baia Mare)**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Clasa a VII-a

A 58-a Olimpiadă de Matematică a Republicii Moldova
Chișinău, 28 februarie - 3 februarie, 2014
Prima zi

33. Considerăm toate numerele naturale cu 2014 cifre. Câte dintre ele au suma cifrelor pară?

34. Determinați numărul natural a, pentru care numărul N = $(a^2+85)^2-(18a+3)^2$ este prim.

35. Care poate fi numărul minimal de membri ai cercului de matematică dacă se știe că numărul fetelor reprezintă mai mult de 43,5 % și mai puțin de 43,6 % din totalul membrilor acestui cerc?

36. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, iar r raza cercului circumscris acestui triunghi. Demonstrați că $a\sqrt{bc} \le r(b+c)$.

A doua zi

37. Calculați ultimele două cifre ale numărului $7^{5^{5^5}}$.

38. Fie numerele naturale nenule x și y, astfel încât $4^{x-1}+4^y \le 2^{x+y}$. Demonstrați că numărul 2^x+2^y este divizibil cu 3.

39. Demonstrați că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000} < 0{,}01$.

40. Triunghiul ABC este echilateral. Pe semidreapta AC, după punctul C, se consideră punctul D, iar pe semidreapta BC, după punctul C, se consideră punctul E, astfel încât $BD \equiv DE$. Demonstrați că $AD \equiv CE$.

A 59-a Olimpiadă de Matematică a Republicii Moldova
Chișinău, 27 februarie - 2 februarie, 2015
Prima zi

41. Demonstrați că numărul S = $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2015}$ este divizibil cu 100.

42. Aflați două numere naturale de câte 4 cifre fiecare a căror produs este egal cu 11111111.

43. a) Fie x și y numere reale pozitive. Arătați că $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x}{2}+\frac{y}{2}$.

b) Arătați că $\forall\, n$ g û avem: $\sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}}+\sqrt{\frac{3^2+4^2}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{(n-1)^2+n^2}{2}} \ge \frac{n(n+1)}{4}$.

92. Un dreptunghi 5×100 este împărțit în 500 de pătrate unitate, dintre care n sunt colorate în negru, iar toate celelalte în alb. Două pătrate unitate se numesc *adiacente* dacă au o latură comună. Fiecare pătrat unitate are cel mult două pătrate unitate adiacente negre. Aflați cea mai mare valoare posibilă a lui n.

Ediția a XXIV-a, online, 2020

93. Determinați toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac sistemul de ecuații: $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ și $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

94. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și fie E piciorul perpendicularei din A pe BC. Fie $Z \neq A$ un punct pe dreapta AB astfel încât $AB = BZ$. Fie (c) cercul circumscris triunghiului AEZ. Fie D al doilea punct de intersecție a lui (c) cu ZC și fie F punctul diametral opus lui D în cercul (c). Fie P punctul de intersecție a dreptelor FE și CZ. Dacă tangenta în Z la cercul la (c) intersectează PA în punctul T, demonstrați că punctele T, E, B, Z sunt conciclice.

95. Alice și Bob joacă următorul joc: Alice alege o mulțime $A = \{1, 2, ..., n\}$, unde $n \geq 2$ este un număr natural. Apoi, începând cu Bob, ei aleg alternativ câte un număr din mulțimea A, respectând următoarele condiții: inițial Bob alege orice număr dorește, apoi numărul ales la fiecare pas trebuie să fie diferit de toate numerele alese anterior și trebuie să difere cu 1 de un număr deja ales. Jocul se termină atunci când toate numerele din mulțimea A au fost alese. Alice câștigă dacă suma tuturor numerelor alese de ea este număr compus. În caz contrar câștigă Bob. Stabiliți care din cei doi jucători are strategie de câștig.

96. Determinați toate numerele prime p și q pentru care $1 + \frac{p^q - q^p}{p + q}$ este număr prim.

INDICAȚII. SOLUȚII. COMENTARII

ETAPA JUDEȚEANĂ – SUBIECT UNIC

Clasa a V-a
2014

9. Trecând la descompunerea zecimală obținem: $a(b-c)=1$, de unde $a=1$ și $b=c+1$. Numerele care satisfac relația din enunț sunt: 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187 și 198. **10. a)** Se observă că numerele care satisfac condițiile din enunț au ultima cifră 4 sau 9. Sunt două numere de câte o cifră care aparțin mulțimii M (4 și 9). Sunt două numere de două cifre în M (44 și 99). Sunt 20 de numere de trei cifre în M (404, 414, ..., 494 și 909, 919, ..., 999). Sunt 20 de numere de patru cifre (4004, 4114, ..., 4994 și 9009, 9119, ..., 9999). Al 50-lea număr din M este al șaselea număr de cinci cifre, adică 40504; **b)** Cel mai mic este numărul $98\underbrace{99...9}_{220 \text{ de } 9}89$ (cât mai multe cifre de 9), iar cel mai mare număr este $4\underbrace{11...1}_{2006 \text{ de } 1}4$ (cât mai multe cifre de 1, posibil). **11. a)** Presupunem prin absurd că există o astfel de partiție. În acest caz produsul elementelor mulțimii A este pătrat perfect. Însă produsul elementelor mulțimii A este egal cu $3^{1+2+3+...+2014} = 3^{(2014 \cdot 2015):2} = 3^{1007 \cdot 2015}$, contradicție!; **b)** Se observă că $3^{2k} + 3^{2k+1} = (3^k \cdot 2)^2$ este pătrat perfect. Fiind o problemă de existență este suficient să considerăm partiția $A = \{1, 3\} \cup \{3^2, 3^3\} \cup \ldots \cup \{3^{2012}, 3^{2013}\} \cup \{3^{2014}\}$. **12. a)** În scrierea unui număr dichisit, cifrele pare alternează cu cele impare. Deci un număr de 10 cifre conține exact 5 cifre pare, adică pe 2; **b)** Există 32 de numere dichisite de forma $\overline{2a2b2c2d2e}$ și 32 de numere dichisite de forma $\overline{a2b2c2d2e2}$; **c)** Observăm că dacă numărul $n_1 = \overline{a_1a_2...a_{10}}$ este dichisit, atunci și numărul $n_2 = \overline{(4-a_1)(4-a_2)...(4-a_{10})}$ este dichisit și $n_1 \neq n_2$. Cele 64 de numere dichisite le formăm în perechi de forma (n_1, n_2). Însă $n_1 + n_2 = \underbrace{44...4}_{10 \text{ cifre}}$. Suma tuturor numerelor este egală cu $32 \cdot \underbrace{44...4}_{10 \text{ cifre}} = 2^7 \cdot 11 \cdot 1010101010 = 1408 \cdot 1010101010$.

2015

13. Avem $\overline{ab} = a + (a+1) + ... + (b-1) + b \leq 1 + 2 + ... + 9 = 45$, deci $a \leq 4$. Dacă $a = 1$, atunci $1 + 2 + ... + (b-1) + b = \overline{1b} = 10 + b$, de unde $1 + 2 + ... + (b-1) = 10$ sau $(b-1)b = 20$. Ecuația $(b-1)b = 20$ are soluția naturală 5, deci $\overline{ab} = 15$, soluție. Dacă $a = 2$, atunci $2 + 3 + ... + {} + ... + (b-1) + b = 20 + b$, de unde $(b-1)b = 42$, ecuație care are soluția 7, deci $\overline{ab} = 27$, soluție. Dacă $a = 3$, se obține ecuația $(b-1)b = 66$ care nu are soluție pentru $b \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dacă $a = 4$, atunci $\overline{ab} \geq 45$. Însă $4 + 5 + ... + 9 < 45$, contradicție! Prin urmare, $\overline{ab} = \{15; 27\}$. **14.** Notăm cu a, b, c numărul elevilor care au rezolvat exact una, două și, respectiv, trei probleme. Avem relațiile: $a + b + c = 50$ și $a + 2b + 3c = 100$, de unde rezultă că $b + 2c = 50$ și $2c \leq 50$, adică $c \leq 25$. **15. a)** Primele 99 de submulțimi conțin $2 + 4 + \ldots + 100 = 5049$ de elemente. Deci cel mai mic element din cea de-a 100-a submulțime este 5050. **b)** Dacă 2015 este cel mai mare element al celei de-a n-a submulțime, atunci avem relația: $2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = 2015$, de unde $(n+1)(n+2) = 4032 = 63 \cdot 64$. Deci 2015 este cel mai mare element al celei de-a 62-a submulțime. **16. a)** $1038^2 = 1077444$; **b)** Fie numărul $a = 1\underbrace{00...0}_{n \text{ ori}}38 = 10^{n+2} + 38$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Avem $a^2 = \left(10^{n+2} + 38\right)^2 = 10^{2n+4} + 76 \cdot 10^{n+2} + 1444$. Ultimele trei cifre ale

Cum $\sphericalangle BCA = 40°$ rezultă că semidreapta CD este bisectoarea $\sphericalangle BCE$, deci $\sphericalangle DCE = 40°$. ΔDFC \ ΔDEC (U.L.U.), de unde rezultă că FC \ EC şi FD \ DE, deci dreapta CD este mediatoarea segmentului FE, de unde FE u AC.

62. Din $a > b > c$ şi $a, b, c \in \mathbb{N}$ rezultă că a U $b + 1$ U $c + 2$, deci $a - c$ U 2.

Dacă $a - c$ U 4, atunci $13c > 11a$ U $11(c + 4)$, de unde c U 22 şi $a + b + c > c + c + c = 3c$ U U $66 > 56$. Analizăm cazurile: $a - c = 2$ şi $a - c = 3$.

Dacă $a - c = 2$, atunci din a U $b + 1$ U $c + 2$, rezultă $a = b + 1 = c + 2$ şi $12(c + 1) > 13c >$ $> 11(c + 2)$, de unde $c < 12$ şi $c > 11$, contradicţie!

Dacă $a - c = 3$, atunci $a = c + 3$ şi $b \in \{c+1, c+2\}$.

Dacă $b = c + 1$, atunci $12(c + 1) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $c < 12$ şi $c > \frac{33}{2}$, contradicţie!

Dacă $b = c + 2$, atunci $12(c + 2) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $c < 24$ şi $c > \frac{33}{2}$, deci c U 17 şi b U 19, iar a U 20, de unde $a + b + c$ U $17 + 19 + 20 = 56$.
Egalitate avem dacă $c = 17$; $b = 19$ şi $a = 20$.

63. Triunghiurile cu vârfurile în câte trei din cele 3 x 9 puncte sunt de două tipuri: cu vârfurile pe câte o latură a triunghiului dat şi cu două vârfuri pe o latură a triunghiului dat şi al treilea pe a treia latură.
Sunt $9^3 = 729$ de triunghiuri de tipul I (fiecare vârf se poate alege în 9 moduri).

Pentru cele de tipul II, putem alege două vârfuri pe una din laturi în $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ de moduri.

Al treilea vârf în acest caz se alege în $2 \cdot 9$ moduri pe celelalte două laturi, deci în acest caz sunt $2 \cdot 9 \cdot 36 = 648$ astfel de triunghiuri pentru fiecare latură iar în total sunt $648 \cdot 3 = 1944$.
În total, sunt $729 + 1944 = 2673$ de triunghiuri.

2018

64. Fie $(a, b) = d$. Există numerele naturale nenule m şi n cu $(m, n) = 1$ astfel încât $a = dm$ şi $b = dn$.

Avem: $dm^2 = dn + dmn$ $\left([a,b] = \frac{ab}{(a,b)}\right)$, de unde $dm = n + mn$ 1 m⅟n. Însă $(m, n) = 1$, deci $m = 1$ şi $d = 2n$ iar $a = 2n$ şi $b = 2n^2$.

Perechile de numere $(2n, 2n^2)$ verifică relaţia din enunţ, deci există o infinitate de numere naturale a şi b care satisfac relaţia dată, deoarece $n \in \mathbb{N}^*$, n oarecare.

65. Fie semidreapta DE bisectoarea unghiului rADC, E g AC. Notăm r$ABC = y$; r$EDC = x$; r$BAD = a$; r$DAC = b$; r$ACB = t$. (**fig. 308**) Problema se reduce la a arăta că DE \ CE, adică $x = a + b$, fiindcă rBAC = rACB (ÇABC este isoscel). Avem relaţiile: $2x = y + a$ (**teorema unghiului exterior** ÇABD), **(1)**
Însă $y = b + t = b + a + b = a + 2b$ (**teorema unghiului exterior** ÇADC), **(2)**

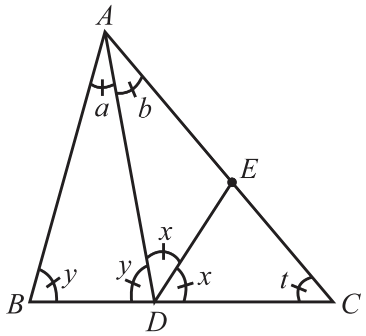


Fig. 308

Din **(1)** şi **(2)** rezultă $2x = 2a + 2b$, adică $x = a + b$.
Deci rEDC = rECD, de unde DE \ CD, adică punctul E aparţine şi mediatoarei segmentului CD.

47. Soluția 1. Din $AD \parallel CK$ și $DC \nparallel AK$ rezultă că patrulaterul $CKAD$ este trapez cu $AK \cap DC = \{B\}$ (**fig. 380**). Notăm cu M mijlocul segmentului AD și $\{F\} = BM \cap CK$. În ΔBCK, cum $AD \parallel KC$ și M mijlocul segmentului AD 1 F mijlocul segmentului KC. Știm că dreapta BM trece și prim punctul de intersecție al diagonalelor trapezului. Așadar, diagonala KD trece prin E, deci punctele D, E, K sunt coliniare. **Soluția 2.** La fel ca soluția 1 (în ΔBCK) rezultă BF mediană. Dar, din $DA \parallel CK$ și D mijlocul segmentului BC 1 A mijlocul segmentului BK, adică CA mediană în ΔBCK. Așadar E este centrul de greutate al triunghiului KBC 1 mediană KD trece prin E, deci punctele K, E, D sunt coliniare.

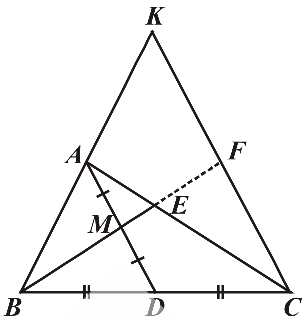


Fig. 380

48. a) Mai întâi facem câteva observații de bun simț: aplicând inegalitatea mediilor, pentru fiecare factor al expresiei, obținem $E(a, b) > 2^3 \cdot \sqrt{\frac{8}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{8}} = 8$, egalitatea neputând avea loc; pentru $a = b = 1$ 1 $E(1, 1) = \frac{81}{4} = 20{,}25$; pentru $a = b = \frac{1}{2}$ 1 $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{8} < E(1, 1)$.

Constatăm că suntem obligați să desfacem expresia $E(a, b) = \left(8a + \frac{8}{b} + 1 + \frac{1}{ab}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{8}\right) = 8ab +$
$+ a + 8 + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{8} + \frac{1}{a} + \frac{1}{8ab} = \frac{65}{8} + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(8ab + \frac{1}{8ab}\right)$. Dar $a + \frac{1}{a}$ U 2, $b + \frac{1}{b}$ U 2, $8ab + \frac{1}{8ab}$ U 2 și egalitățile nu pot avea loc simultan, deci $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(8ab + \frac{1}{8ab}\right) > 2 + 2 + 2 = 6$.

Așadar, obținem $E(a, b) > \frac{65}{8} + 6 = \frac{113}{8}$. **b)** Reluăm forma expresiei $E(a, b) = \frac{65}{8} + \left(a + \frac{1}{a}\right) +$
$+ \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(8ab + \frac{1}{8ab}\right)$ și o scriem sub forma $E(a, b) = \frac{65}{8} + \left(a + b + \frac{1}{8ab}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab\right)$.

Folosind inegalitatea mediilor m_a U m_g, obținem: $a + b + \frac{1}{8ab}$ U $3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot \frac{1}{8ab}} = \frac{3}{2}$, cu egalitate pentru $a = b = \frac{1}{8ab}$, adică $8a^3 = 1$, de unde $a = b = \frac{1}{2}$. Analog $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab$ U

U $3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot 8ab} = 6$, cu egalitate pentru $a = b = \frac{1}{2}$. Obținem $E(a, b)$ U $\frac{65}{8} + \frac{3}{2} + 6 = \frac{113}{8} + \frac{3}{2} =$
$= \frac{125}{8}$, cu egalitate pentru $a = b = \frac{1}{2}$. Prin urmare, minimul expresiei $E(a, b) = E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{8}$.

Ediția a XXIII-a, Agros, Cipru, 2019

89. Fie $n = x^p + y^p + z^p - x - y - z$. Dacă $p = 2$, atunci pentru $x = y = 4$ și $z = 3$ obțin $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, soluție. Dacă $p = 3$, atunci pentru $x = 3$, $y = 2$ și $z = 1$ obțin $n^n = 30$, soluție. Dacă $p = 5$, atunci pentru $x = 2$, $y = 1$ și $z = 1$ obțin $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, soluție. Dacă $p \geq 7$, p prim, arătăm că nu mai avem soluții. Dacă $p \geq 7$, atunci $x^p \equiv x(\text{mod } p)$ (mica teoremă a lui **Fermat**). Deci avem ecuația $(x^p - x) + (y^p - y) + (z^p - z) \equiv 0(\text{mod } p)$. Dar $x^p - x = x(x^{p-1} - 1) = x(x-1)(x^{p-2} + x^{p-3} + ... + x + 1)$ și $6/x^p - x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}^*$. Cum $p > 2$, $p > 3$ rezultă că $x^p + y^p + z^p - x - y - z = 6p$, $p \geq 7$. Putem considera $x \geq y \geq z$, unde $x \geq 2$. Deci $6p \geq x^p - x$ oricare ar fi $x \geq 2$ și $p \geq 6$. Însă prin **inducție** arătăm că $x^p - x > 6p$, oricare ar fi $x \geq 2$ și $p \geq 6$, p prim. Urmează că $p \in \{2; 3; 5\}$.

90. Avem $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b \Rightarrow (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 2019(a - b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 + b^2) = 2019$ deoarece $a \neq b$ adică $a - b \neq 0$, **(1)**. Însă $2c = a^4 + b^4 - 2019(a + b)$, **(2)**. Din **(1)** și **(2)** $\Rightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^2(a^2 + b^2) = -2ab(a^2 + ab + b^2)$, **(3)**. Deci $ab(a^2 + ab + b^2) = -c < 0$, **(4)**. Dar $a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab > -ab$ pentru că $(a + b)^2 > 0$.
Din **(3)** și **(4)** rezultă $-\sqrt{c} < ab < 0$.

91. Fie $AN \cap HM = \{T\}$ (**fig. 401**). $AH \perp BC$ și $QM \perp BC \Rightarrow AH \parallel PM \Rightarrow \measuredangle BAH \equiv \measuredangle APM$ (**corespondente**). $MP \parallel AH \Rightarrow \measuredangle HAC \equiv \measuredangle MQC = 90° - \measuredangle ACB = \measuredangle HBC = \measuredangle AQN$. $\measuredangle MTN = 180° - \measuredangle THM - \measuredangle TMN = 180° - \measuredangle TMB - \measuredangle TMN = 180° - \measuredangle NMB = 90°$. Considerăm punctul D diametral opus punctului A în cercul circumscris ΔABC. Punctele H, M, D sunt coliniare și cum $\measuredangle ATD = 90°$ rezultă că punctul T aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

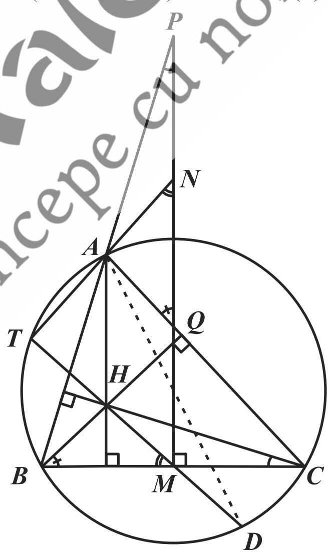


Fig. 401

92. Presupunem că avem în colțurile dreptunghiului, a pătrățele negre, b pătrățele laterale negre cu excepția celor din colțuri și c pătrățele negre interioare. Fie N numărul de perechi $(c_1; c_2)$ de pătrățele astfel încât c_1 să fie negru, iar c_2 să fie vecin cu c_1. Avem: $N = 2a + 3b + 4c$, $N \geq 1000$. Deci $2a + 3b + 4c = 4(a + b + c) - 2a - b \geq 4(a + b + c) - (2 \cdot 4 + 202) \geq 1000$, de unde $a + b + c \geq 302$. Cea mai mare valoare a lui n este 302 și se obține când $a = 4$ și $b = 202$.

Ediția a XXIV-a, online, 2019

93. Din relațiile date rezultă că: $(a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc)^2 = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(a + b + c)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)[(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 2abc(a + b + c)] = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \Leftrightarrow (a^2bc + ab^2c + abc^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(ab + ac + bc) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^4bc + ab^4c + abc^4 = a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 \Leftrightarrow (ac - b^2)(ab - c^2)(bc - a^2) = 0$.

Cazul: $bc - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = bc$. Din relația $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ rezultă $a^2bc + ab^2c + abc^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow bc(a + b + c) = a + b + c$, **(*)**. Dacă $a + b + c = 0$, atunci $(b + c)^2 = a^2$, adică $(b + c)^2 = bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 + bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0$, fals pentru că $a \neq 0$, $b \neq 0$ și $c \neq 0$. Din relația **(*)** rezultă $bc = 1$, adică $a^2 = 1$ sau $a \in \{-1; 1\}$. Prin urmare, $a \in \{-1; 1\}$, $b = m$ și $c = \frac{1}{m}$. Cazurile $ac - b^2 = 0$ și $ab - c^2 = 0$ conduc la $b \in \{-1; 1\}$ și $c \in \{-1; 1\}$. Prin permutări circulare se obțin toate soluțiile problemei.